Aplicações da Derivada

1 – Interpretação cinemática da derivada

Vamos agora interpretar a derivada do ponto de vista da cinemática, que estuda o movimento dos corpos. Veremos que a *velocidade* e a *aceleração* de um corpo podem ser determinadas através das derivadas de primeira e segunda ordem, respectivamente, quando conhecemos a função horária do movimento do corpo.

Velocidade. Considere um corpo que se move em linha reta e seja $s = s(t)$ a sua função horária, isto é, o espaço percorrido em função do tempo. O deslocamento do corpo no intervalo de tempo t e $t + \Delta t$ é definido por $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$.

A *velocidade média* do corpo neste intervalo de tempo é definida por:

$$\boxed{v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}}$$

A velocidade média do corpo não dá uma informação precisa sobre a velocidade em cada instante do movimento no intervalo de tempo t e $t + \Delta t$. Para obtermos a *velocidade instantânea* do corpo no instante t, precisamos calcular a velocidade média em intervalos de tempo cada vez menores, isto é, fazendo $\Delta t \to 0$.

A *velocidade instantânea* do corpo no instante t é definida por:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} v_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = s'(t)$$

Assim, $\boxed{v(t) = s'(t)}$.

A velocidade instantânea $v(t)$ é a primeira derivada da função horária $s(t)$.

Aceleração. De forma análoga ao conceito de velocidade vem o de aceleração:

A *aceleração média* do corpo no intervalo de tempo t e $t + \Delta t$ é definida por

$$\boxed{a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}} \; .$$

A *aceleração instantânea* do corpo no instante t é definida por

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} a_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = v'(t)$$

Assim, $\boxed{a(t) = v'(t)}$.

Como $v(t) = s'(t)$ podemos escrever a aceleração instantânea como a segunda derivada dos espaço em relação ao tempo. Assim $a(t) = s''(t)$.

Exemplos:

a) Suponha que um corpo em movimento retilíneo tenha função horária definida por $s(t) = 12t - 2t^2$ e no instante $t = 0$ ele inicia o movimento. Considere o espaço medido em metros e o tempo em segundos. Determine:

i) a velocidade média do corpo no intervalo de tempo$[1,3]$;

ii) a velocidade do corpo no instante $t = 1$;

iii) a aceleração média do corpo no intervalo de tempo$[1,3]$;

iv) a aceleração do corpo no instante $t = 1$.

Solução:

i) $v_m = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t} = \dfrac{s(3)-s(1)}{3-1} = \dfrac{18-10}{2} = \dfrac{8}{2} = 4m/s$.

ii) $v(t) = s'(t) = 12 - 4t \quad \therefore \quad v(1) = 12 - 4 = 8m/s$.

iii) $a_m = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t} = \dfrac{v(3)-v(1)}{3-1} = \dfrac{0-8}{2} = -4m/s^2$.

iv) $a(t) = s''(t) = -4 \quad \therefore \quad a(3) = -4m/s^2$.

b) Uma partícula em movimento retilíneo tem a função horária dada por $s(t) = 2t^3 - 21t^2 + 60t + 3$. Considere o espaço medido em metros e o tempo em segundos. Determine:
i) Em que instante a partícula pára, isto é, tem velocidade nula?
ii) Determine a aceleração da partícula no instante $t = 4{,}5s$.

Solução:

i) $v(t) = s'(t) = 6t^2 - 42t + 60 \Rightarrow v(t) = 6(t^2 - 7t + 10) = 6(t-2)(t-5)$.

$v(t) = 0 \Leftrightarrow 6(t-2)(t-5) = 0 \Leftrightarrow t = 2s$ ou $t = 5s$. Assim a partícula tem velocidade nula nos instantes $t = 2s$ e $t = 5s$.

ii) $a(t) = s''(t) = 12t - 42$

$\therefore a(4{,}5) = 12(4{,}5) - 42 = 12m/s^2$.

2 – Taxa de variação

Vimos na seção anterior que se $s = s(t)$ é a função horária do movimento retilíneo de um corpo, a *velocidade média* é dada por $v_m = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ e a *velocidade instantânea* é a dada pela derivada

$$v(t) = s'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}.$$

Da mesma forma, a *aceleração média* é $a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ e a *aceleração instantânea* é dada pela derivada

$$a(t) = v'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}.$$

As ***razões*** $\boldsymbol{v_m}$ e $\boldsymbol{a_m}$ são exemplos de **taxas médias de variação** num intervalo e as razões

$$v(t) = s'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \text{e} \quad a(t) = v'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

são exemplos de **taxas instantâneas de variação** num ponto, ou simplesmente **taxas de variação** num ponto.

Definição: De uma forma geral, se $y = f(x)$ é uma função, a razão $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ é chamada de **taxa média de variação** da função f no intervalo $[x, x + \Delta x]$ e a derivada

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

é chamada de **taxa de variação** da função f no ponto x.

“Toda taxa de variação pode ser interpretada como uma derivada”.

Interpretando a derivada desta forma, podemos resolver diversos problemas das ciências que envolvem razões instantâneas de variação.

Exemplos:

1) Suponha que um óleo derramado através da ruptura do tanque de um navio se espalhe em forma circular cujo raio cresce a uma taxa de *2m/h*. Com que velocidade a área do derramamento está crescendo no instante em que o raio atingir *60m*?

Solução:

A taxa com que o raio cresce é de *2m/h*. Podemos interpretar e denotar esta taxa de variação como $\frac{dr}{dt}=2\ m/h$. Queremos calcular a taxa com que a área cresce em relação ao tempo. Podemos denotar esta taxa de variação como $\frac{dA}{dt}$. A área do derramamento é circular, logo $A = \pi r^2$.

Queremos calcular $\frac{dA}{dt}$ e temos $\frac{dr}{dt}$. A **regra da cadeia** relaciona estas razões através de $\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$. Assim, $\frac{dA}{dt}=2\pi r.2=4\pi r$. Quando o raio atingir *60m* a área do derramamento estará crescendo a uma taxa de $4\pi\,(60)m^2/h = 240\pi m^2/h$.

2) Uma plantação de *Eucalyptus Saligna* é atingida por uma moléstia que ameaça matar toda a plantação. Uma equipe técnica realiza um estudo e conclui que o número de plantas atingidas pela moléstia depois de um tempo t (medido em dias a partir do primeiro dia) é, aproximadamente, dado por: $f(t) = 64\,t - \frac{t^3}{3}$.

i) Qual a razão de expansão da moléstia no tempo $t=4$?
ii) Qual a razão de expansão da moléstia no tempo $t=8$?

Solução: A taxa com que a moléstia se propaga é dada pela razão de variação da função $f(t)$ em relação a t. Portanto, para um tempo t qualquer, essa taxa é dada por $f\,'(t)=64\,t-t^2$

(a) No tempo $t=4$, temos:

$f\,'(4)=64-16=48$.

Significa que, no tempo $t=4$, a moléstia está se alastrando à razão de 48 plantas por dia.

(b) No tempo $t=8$, temos:

$f\,'(8) = 64-64=0$

Significa que no tempo $t=8$ a moléstia está totalmente controlada.

3) Analistas de produção verificaram que, em uma montadora x, o número de peças produzidas nas primeiras t horas diárias de trabalho é dado por

$$f(t) = \begin{cases} 50(t^2+t), & 0 \le t \le 4 \\ 200(t+1), & 4 < t \le 8 \end{cases}$$

(i) Qual a razão de produção (em unidades por hora) após 3 horas de trabalho? E após 7 horas?

(ii) Quantas peças são produzidas na 8ª horas de trabalho?

Solução:

(i) A razão de produção após 3 horas de trabalho é dada por *f ´(3)*. Para *t<4* temos:

f ´(t) = 50(2t + 1).

Portanto, *f ´(t) = 50 (2 . 3 + 1) = 50 . 7 = 350*

Logo, após 3 horas de trabalho a razão de produção é de 350 peças por hora de trabalho.

A razão de produção após 7 horas de trabalho é dada por *f ´(7). Para t > 4,*

f ´(7) = 200. (1) = 200.

Logo, a razão de produção após 7 horas de trabalho a razão de produção é de 200 peças por hora de trabalho.

(ii) O número de peças produzidas na 8ª hora de trabalho é dada por:

f (8) – f (7) = 200 (8 + 1) – 200(7 + 1) = 1800 – 1600 = 200.

Neste exemplo, o número de peças produzidas na 8ª hora de trabalho coincidiu com a razão de produção após 7 horas de trabalho. Isso ocorreu porque a razão de produção permaneceu constante durante o tempo considerado.

4) Um reservatório de água está sendo esvaziado para limpeza. A quantidade de água no reservatório, em litros, *t* horas após o escoamento ter começado é dada por: $V = 50\ (80 - t)^2$. A partir destas informações, determinar:

(a) A taxa de variação média do volume de água no reservatório durante as 10 primeiras horas de escoamento;

(b) A taxa de variação do volume de água no reservatório após 8 horas de escoamento;

(c) A quantidade de água que sai do reservatório nas 5 primeiras horas de escoamento.

Solução:

(*a*) A taxa de variação média do volume nas 10 primeiras horas é dada por:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta v}{\Delta t} &= \frac{50(80-10)^2 - 50(80-0)^2}{10}\\ &= \frac{50\,[70^2 - 80^2]}{10}\\ &= 50 \cdot (-150)\\ &= -7.500 \text{ l/hora.}\end{aligned}$$

O sinal negativo aparece porque o volume de água está diminuindo com o tempo.

(*b*) A taxa de variação do volume de água num tempo qualquer é dada por:

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= 50 \cdot 2(80-t)(-1)\\ &= -100(80-t).\end{aligned}$$

No tempo, $t = 8$, temos:

$$\begin{aligned}\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(8)} &= -100(80-8)\\ &= -100 \cdot 72\\ &= -720 \text{ l/h.}\end{aligned}$$

(c) A quantidade de água que sai do reservatório nas 5 primeiras horas é dada por:

$$V(0) - V(5) = 50(80)^2 - 50(75)^2$$
$$= 38.750 \text{ l.}$$

5) Na tabela a seguir, expõe medições feitas na produção de milho por hectare *f(kg/ha)* como função da quantidade de nitrogênio *x (kg/ha)*:

x	*0*	*10*	*20*	*30*	*40*	*50*	*60*	*70*	*80*
f (x)	*1451,0*	*1651,8*	*1816,6*	*1945,4*	*2038,2*	*2095,4*	*2115,8*	*2100,6*	*2049,4*

Com base nesses dados, qual será produção quando forem adicionados *22 kg/ha* de nitrogênio?

Solução:

Para estimar esta produção, avalia-se o que está acontecendo entre *20* e *30*, encontrando a equação da reta que passa pelos pontos *(20 ; 1816,6)* e *(30 ; 1945,4)*, ou seja, pelos pontos *(20 ; f(20))* e *(30 ; f(30))*. Calculando o coeficiente angular, ou taxa de variação, tem-se

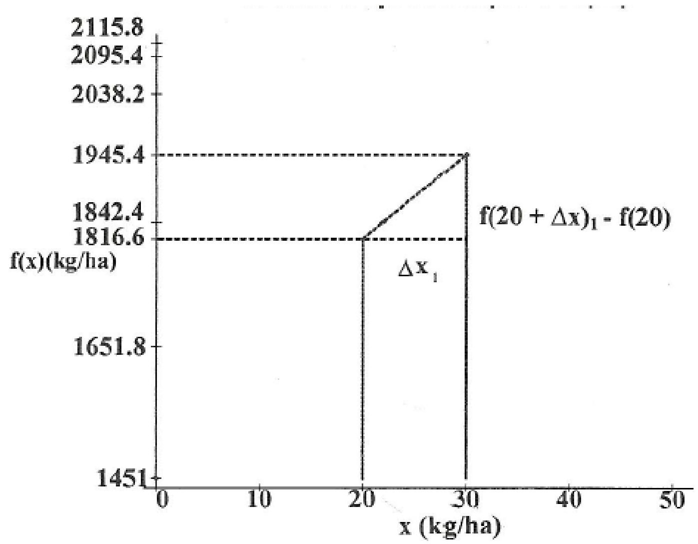
$$\text{taxa de variação} = \frac{f(30) - f(20)}{30 - 20}$$

Reescrevendo essa expressão e considerando os intervalos de mediação igual a $\Delta x_1 = 10$, obtém-se:

$$\textbf{taxa de variação} = \frac{f(20 + \Delta x_1) - f(20)}{\Delta x_1} = \frac{1945.4 - 1816.6}{10} = \mathbf{12.88}$$

Essa é inclinação da reta unindo os pontos *(20 ; 1816,6)* e *(30 ; 1945,4)*. Logo, a equação da reta *f(x) = b + a x*, para qualquer $0 \leq x \leq 10$ a partir de *x = 20*, será ***f (20 + x) = f (20) + 12,88 x***. Com esse resultado, pode-se dizer que a produção para *x = 20* está crescendo à uma taxa de aproximadamente 12,88. Isso quer dizer que, adicionando-se 22 kg/ha, a produção será aproximadamente *f(22) = f(20) + 12,88 . (22 – 20) = 1842,4 kg/ha.*

Geometricamente, o que se obteve está descrito no gráfico a seguir.



6) Segundo Alvarez, a vazão (em cm^3) de um canal de irrigação horizontal, (considerando a distância do jato igual a *30 cm*), é dada em função do diâmetro (*d*) do tubo. Sendo $Q(d) = 375.d^2$, em que $D = \{d \in \mathbf{R} \,/\, 7{,}5 \leq d \leq 15 \text{ cm}\}$. Determine a taxa de variação da vazão do canal de irrigação na horizontal quando o diâmetro do tubo for igual a *9 cm*.

Solução:

Primeiramente, vamos calcular *Q´(d)* e depois substituir o valor *d = 9 cm*.

$Q´(d) = 375.2.d = 750.d \Rightarrow Q´(9) = 750.9 = 6.750 \text{ cm}^3$.

Logo, quando *d=9 cm*, a vazão irá variar em 6.750 cm^3.

Exercícios

1) Um açude destinado a criação de peixes está sendo drenado para limpeza. Um pesquisador observou que o volume inicial de água era de 90.000 litros e de um tempo de *t* horas este volume diminuiu 2.500 t^2 litros. Assim, deseja-se saber:
1.1) O tempo necessário para o esvaziamento total do açude;
1.2) a taxa média de escoamento de intervalo de 2 a 5 horas;
1.3) A taxa de escoamento depois de 2 do início do processo.

2) Um fazendeiro pretende alugar uma área de terra para criação de bovinos por R$ 4.500,00. O aluguel sofrerá um reajuste anual de R$ 1.550,00. O fazendeiro possui pouco conhecimento em matemática, mas é amigo de um acadêmico da UFAC(campus de Cruzeiro do Sul). Este fazendeiro soube que o amigo está cursando a disciplina de Cálculo com o Professor Genivaldo e já cursou matemática básica em períodos anteriores, então, pediu o seguinte:
2.1) Expresse a função com a qual podemos calcular a taxa de variação do aluguel, em t anos;
2.2) Calcule a taxa de variação do aluguel após 4 anos.

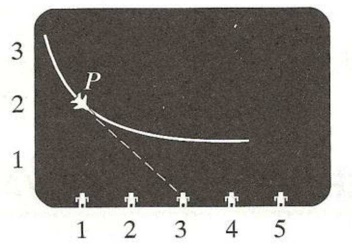
3) Na área da UFAC em Cruzeiro do Sul, há um açude. Uma turma de acadêmicos resolve trabalhar com piscicultura e estima que a população de peixe da espécie em análise, em *t* anos, será de $p(t) = 20 - \frac{5}{t+1}$, em milhares. Assim, determine:
3.1) Daqui a *t* anos, qual será a taxa de variação da população de peixes neste açude?
3.2) Daqui a 18 meses, qual será a taxa de variação da população de peixes neste açude?
3.3) Qual será a variação real sofrida durante o 18º mês?

4) Um estudante está preparando um recipiente com água para análise de uma espécie de peixe. Ele analise e conclui que há $5t - t^{1/2}$ litros de água no recipiente, advindo do gotejamento de uma torneira. Qual a taxa de gotejamento do líquido no recipiente, em litros por hora, quando *t=16* horas*?*

5) Numa granja experimental, constatou-se que uma ave em desenvolvimento pesa, em gramas, $w(t) = \begin{cases} 20 + \frac{1}{2}(t+4)^2, & 0 \le t \le 60 \\ 24{,}4t + 604, & 60 \le t \le 90 \end{cases}$, onde *t* é medido em dias.
5.1) Qual a razão de aumento de peso da ave quanto $t = 50\ dias$?
5.2) Quanto a ave aumentará seu peso no 51º dia?
5.3) Qual a razão de aumento do peso quando $t = 80\ dias$?

6) Uma peça de carne foi colocada em um freezer no instante *t=0.* Após *t* horas, sua temperatura, em graus centígrados, é dada por:
$T(t) = 30 - 5t + \frac{4}{t+1}, \quad 0 \le t \le 5$
Qual a velocidade de redução de temperatura da peça de carne após 2 horas no freezer.

7) No videogame da figura a seguir, os aviões voam da esquerda para a direita segundo a trajetória $y = 1 + \frac{1}{x}$, e podem disparar suas balas na direção da tangente contra as pessoas ao longo do eixo *x* em *x=1,2,4,3* e *5.* Determine se alguém será atingido se o avião disparar um projétil quando estiver no ponto *P(1;2).*



8) Do solo um projétil é disparado verticalmente para cima. Sua altura (em metros) é dada em função do tempo (em segundos) por $h(t) = 160t - 10t^2$.
Determine:

i) As funções velocidade e aceleração do projétil;

ii) Em que instante $t > 0$ o projétil pára?

iii) Quantos segundos dura todo o trajeto do projétil?

iv) Com que velocidade e aceleração o projétil atingirá o solo?

9) Os dados da tabela a seguir representam a produção de matéria seca $h(g/m^2)$ em função da quantidade de luz absorvida $y(W/m^2)$ em diferentes densidades de plantas.

$y\ (W/m^2)$	0	100	200	300	400	500
$h\ (y)$	0	190	380	570	760	950

Estime a produção h de matéria seca para $340\ W/m^2$ de luz absorvida.

10) Sendo $f(t) = 6.e^{0,15t}$, a qual descreve a proliferação de fungos (em milhões) em uma lavoura no tempo t (em dias). Determine a variação da proliferação dos fungos no oitavo dia de análise.

11) Um modelo o qual aproxima a produção de matéria seca de feijão *(g/vaso)* como função da adição de nutrientes x *(fósforo em ppm)*, pode ser dado pela função $f(x) = 6,7287 + 0,061792\ x + 0,0000678\ x^2 - 0,00000083x^3$ cujo domínio é dado por $D=\{\ x \in \mathbf{R}\ /\ 0 \leq x \leq 210\ ppm\}$. Assim, determine a produção estimada quando se utiliza $x_1=27,21\ ppm$ e $x2 = 187,1\ ppm$ de fósforo.

12) Um estudo para determinar o efeito cumulativo dos diferentes sistemas de agricultura sobre a densidade volumétrica do solo $f\ (mg/m^3)$, próximo a superfície, $0 \leq x \leq 0,5\ (m)$ tem-se

- solo arado: $f(x) = 1,21 + 2,95\ x - 11,66\ x^2 + 15,98\ x^3$

- solo coberto com restolho: $f(x) = 1,23 + 1,5\ x - 3,56\ x^2 + 3,04\ x^3$

- solo sem cultivo: $1,14 + 3,17\ x - 17,05\ x^2 + 25,71\ x^3$.

Daí, justifique se é verdadeira a afirmação: “A taxa de variação de aumento na densidade volumétrica foi comparativamente menos no solo sem cultivo”.

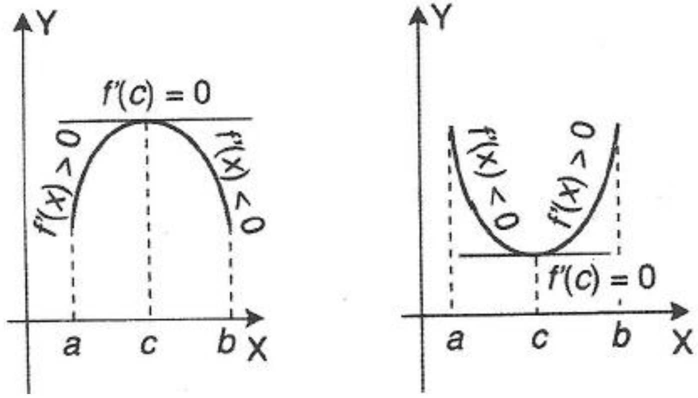
13) A temperatura do ar (ºC) de determinada região, em função dos dias climatológicos pode ser expressa pela função $T_a = 10,4 + 6,1\ sen\left(\frac{N-360}{365}\right).360.$ Determine a variação da temperatura para o 30º dia.

14) Um atleta percorre uma pista de $100\ m$ de modo que a distância $s(t)$ percorrida após t segundos é dada por $s(t)=1/5\ t^2 + 8t\ m$. Determine a velocidade do atleta:

a) No início da corrida; b) após 5 segundos do início c) na chegada

3 Interpretação do sinal da derivada

Sabe-se que o significado geométrico da derivada em um ponto é a medida do coeficiente angular ou a inclinação da reta tangente á curva da função em um ponto. Contudo, observa-se que podem existir pontos onde a inclinação da reta tangente é positiva, negativa ou nula.



Se ***f ´(x) > 0*** sobre o intervalo, *f(x)* é crescente sobre este intervalo;

Se ***f ´(x) < 0*** sobre o intervalo, *f(x)* é decrescente sobre este intervalo;

Se ***f ´(x) = 0*** sobre o intervalo, *f(x)* é constante sobre este intervalo.

4 A segunda derivada

Para interpretar a segunda derivada, deve-se recordar que a primeira derivada mede, por meio da taxa de variação, a velocidade com a qual a função está variando. Dessa forma, a segunda derivada mede a variação da velocidade, ou seja, a aceleração com a qual a função está variando.

Recordando que o sinal de *f´(x)* define intervalos onde a função é crescente Ou decrescente. Da análise do sinal de *f ´´(x)*, obtém-se o seguinte resultado:

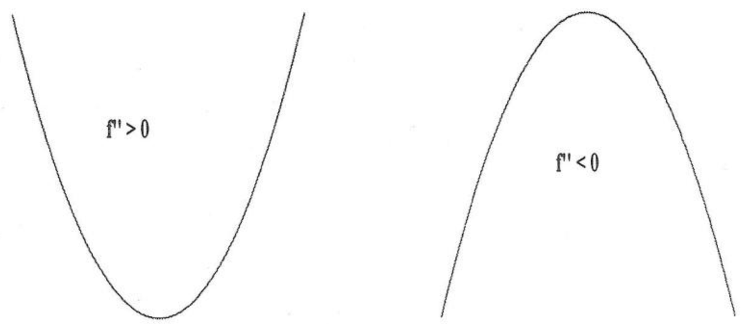
Se *f ´´(x) > 0* sobre um intervalo, então *f ´(x)* é crescente sobre o intervalo, significando que o gráfico de *f(x)* tem a concavidade para cima neste intervalo;

Se *f ´´(x) > 0* sobre um intervalo, então *f ´(x)* é crescente sobre o intervalo, significando que o gráfico de *f(x)* tem a **concavidade para cima** neste intervalo;

Se *f ´´(x) < 0* sobre um intervalo, então *f ´(x)* é decrescente sobre o intervalo, significando que o gráfico de *f(x)* tem a **concavidade para baixo** neste intervalo;

Se *f ´´(x) = 0* sobre um intervalo, significa que *x* é o valor no ponto de mudança de concavidade, denominado **ponto de inflexão**.

Graficamente, tem-se



Exemplo:

Um experimento de resposta do feijão (*g/vaso)* à adição de fósforo *x*, em que $0 \leq x \leq 210$ *ppm*, aproximou-se pela função $f(x) = -0{,}00000083\, x^3 + 0{,}0000678\, x^2 + 0{,}061792\, x + 6{,}7287$. Encontre os intervalos em que a função é crescente ou decrescente e o ponto de inflexão e justifique o significado.

Solução:

Para analisar o sinal de $f\,'(x)$ devem-se encontrar as raízes.

Neste caso, $x_1 = -132{,}64$ e $x_2 = 187{,}1$.

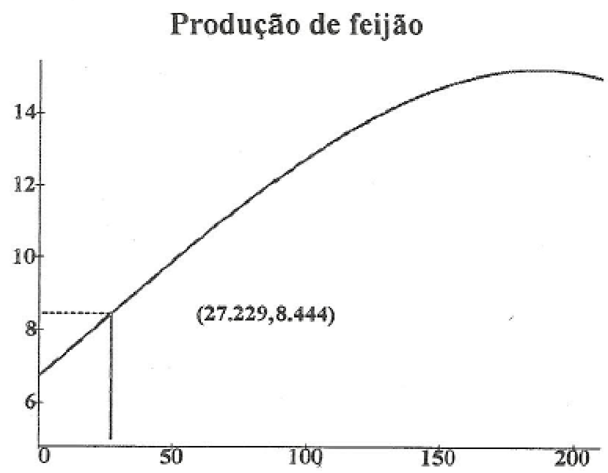
$$f'(x) < 0 \text{ para } x < -132.64 \text{ e } x > 187.1; \Longrightarrow f \text{ é crescente}$$
$$f'(x) > 0 \text{ para } -132.64 < x < 187.1\ . \Longrightarrow f \text{ é decrescente}$$

Calculando a segunda derivada e igualando a zero, tem-se:

$$f''(x) = -0.00000498x + 0.0001356 = 0 \Rightarrow x = 27.229 \text{ ppm P}$$

Daí, temos:

Se $x=27{,}229$, a função muda de concavidade; ressaltando-se que para $x < 27{,}229$ a função tem concavidade para cima e, para $x > 27{,}229$, a função tem concavidade para baixo. Para $x=27{,}229$ indica a quantidade de fósforo aplicada na qual o feijão cresce mais rapitamente.



5 Pontos críticos ou estacionários

Considerando-se uma função *f(x)* definida sobre um domínio *D*, se $x_0 \in D$ e $f\,'(x_0)=0$, x_0 é chamado de **ponto crítico ou estacionário**.

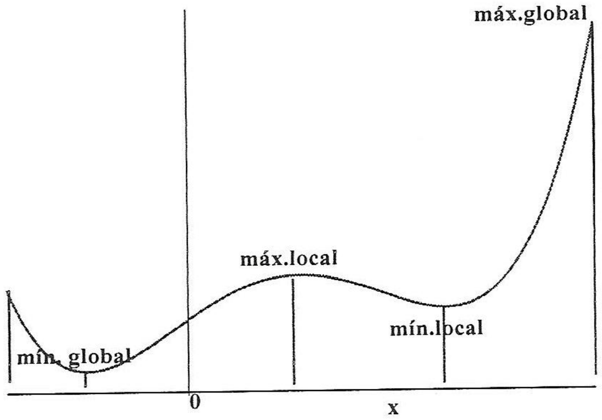
Tem-se, portanto, o seguinte:

Seja $x_0 \in D$ um ponto crítico, isto é, $f\,'(x)=0$. Então, se

- $f\,''(x_0) > 0$, x_0 é um **ponto de mínimo local**;
- $f\,''(x_0) < 0$, x_0 é um **ponto de máximo local**;
- $f\,''(x_0) = 0$, x_0 pode ser um **ponto de inflexão**, havendo mudança de sinal da derivada segunda na vizinhança de *x0*, ou, caso contrário, de máximo ou mínimo local.

f(x) tem um mínimo global em *p* se todos os valores de *f(x)* são superiores ou iguais a *f(p)*.

f(x) tem um máximo global em *p* se todos os valores de *f(x)* são inferiores ou iguais a *f(p)*.



Exemplo 1: Encontre o(s) ponto(s) crítico(s) da função $f(x)=x^3 - 9x^2 - 48x + 52$

(a) Igualando a derivada a zero, obtém-se $f'(x) = 3x^2 - 18x - 48 = 0$, cujas raízes são $x_1 = -2$ e $x_2 = 8$ - pontos críticos pertencentes ao domínio. Efetuando a segunda derivada e substituindo nestes pontos, tem-se $f''(x) = 6x - 18$. Logo, $f''(-2) = -12 - 18 = -30 < 0 \Rightarrow x_1 = -2$ é ponto de máximo local, e o valor máximo local será $f(-2) = 104$; $f''(8) = 48 - 18 = 30 > 0 \Rightarrow x_2 = 8$ é ponto de mínimo local, e o valor mínimo local será $f(8) = -146$; e $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 3$ é o ponto de inflexão.

Exemplo 2:

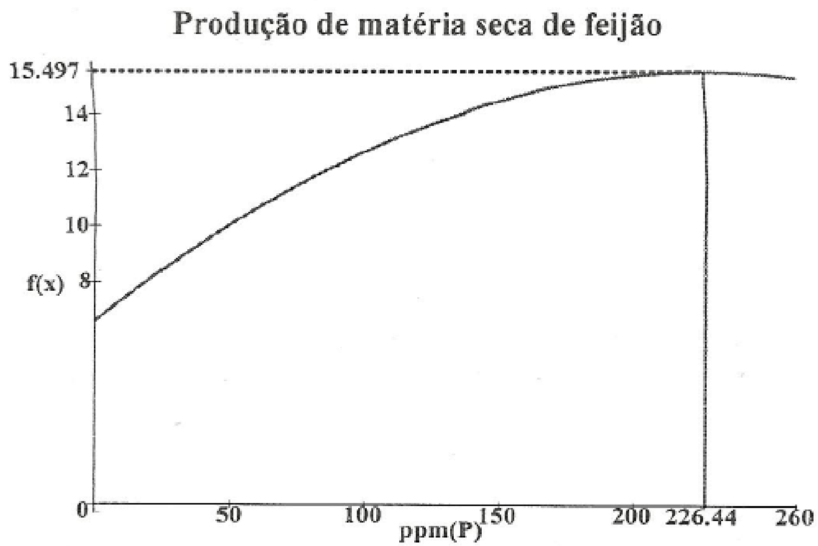
Considerando a produção de matéria seca de feijão *f(x) (g/vaso)* em função da dose de fósforo *x (ppm)*, em que $0 \leq x \leq 230$, dada por $f(x) = 6{,}575 + 0{,}0788\,x - 0{,}000174\,x^2$. Encontre a dose de fósforo que dá a produção máxima.

Solução:

Encontrar ponto crítico significa resolver a equação $f\,'(x)=0$. Assim:

$f\,'(x) = 0{,}0788 - 0{,}000348\,x \Rightarrow x = 226{,}44$

Como $f\,''(x) = -0{,}000348$, então $f\,''(226{,}44) = -0{,}000348$, ou seja, $x = 226{,}44$ *ppm* é um ponto de máximo local, isto é, a produção máxima será de *f(226,44)=15,497 (g/vaso)*.



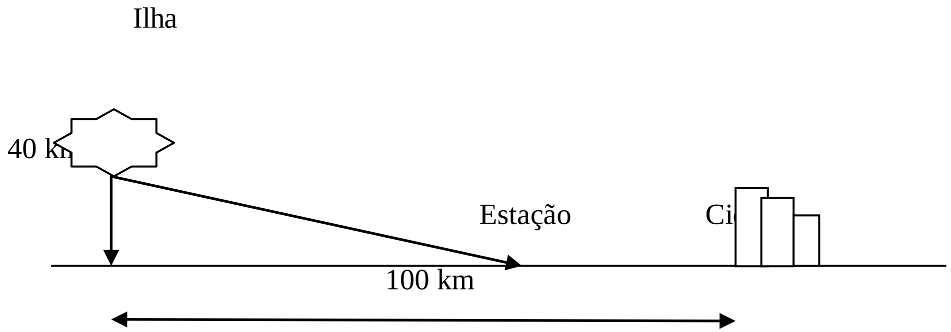
Exercícios

1 – Um pesquisador deseja montar um tanque de criação de peixes à margem de um rio de 500 metros de largura. A água que abastecerá o tanque virá de uma central de abastecimento que fica no outro lado do rio, sendo 2000 metros acima de onde ficará o tanque. O curto da obra de ligação de água é de R$ 640,00 por metro, enquanto em terra custa R$ 312,00. Qual é a forma mais econômica que este agrônomo instalará a rede para abastecimento do tanque de criação de peixes?

2 – Um produtor rural pretende construir um galpão para armazenamento da produção de anual de milho. O galpão terá 12.100 m^2, porém os órgãos fiscalizadores exigem um espaço livre de 25 m na frente, 20 m atrás e 12 m em cada lado. Nestas condições, quais as dimensões do lote de terra onde será construído o galpão, de modo que se utilize área mínima.

3 – Um pesquisador pretende construir um viveiro para análise de alevinos. O viveiro deverá ter base quadrada e seu volume será de 2.500 m^3. O material da base custará R$ 1.200,00 por m^2, e o material dos lados custará R$ 980,00 por m^2. No intuito de economizar, quais deverão ser as dimensões do viveiro de modo que o custo seja mínimo?

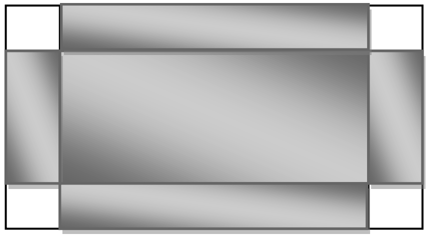
4 – Uma agencia de turismo está organizando um serviço de barcas, de uma ilha situada a 40 km de uma costa quase reta, para uma cidade que dista 100 km, como mostra a figura a seguir. Se a barca tem uma velocidade de 18 km/h e um carro tem velocidade média de 50 km/h, onde deverá estar situada a estação das barcas a fim tornar a viagem a mais rápida possível?



5 – Um fazendeiro deverá cercar dois piquetes de pasto de forma retangular. Se cada piquete medir 400 m^2 de área, quais as dimensões de cada piquete, de modo que se gaste a menor quantidade possível de arame.

6 – Um pequeno produtor deseja construir um galinheiro retangular e dispõe de 180 metros de tela. Para isso resolveu aproveitar um muro já existente para um dos lados do galinheiro e pediu a ajuda, pois deseja que seu galinheiro tenha a maior área possível. O galinheiro deverá ter uma parte paralela ao muro e três perpendiculares a ele. Assim, quais as dimensões do galinheiro a ser construído?

7 – A Granja Carijó firmou recentemente um convênio de cooperação múltipla com a UFAC através do Camus Floresta. O gerente tomou conhecimento de que havia uma grande quantidade de pedaços de zinco, todos medindo 40 cm de largura e 52 cm de comprimento e resolveu aproveitá-los para construir caixas de base retangular, sem tampa, onde será retirado um quadrado e dobrando-se os lados resultados, fabricará tais caixas, que servirão para armazenar alimentos dos pintos. Imagine que você foi o primeiro estagiário foi convocado para esta tarefa, então, determine as dimensões da caixa de modo que elas tenham volume máximo.

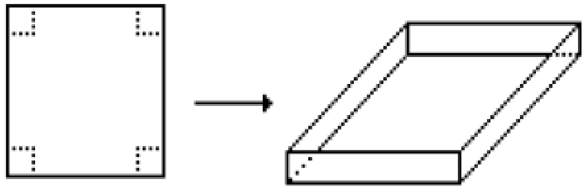


8 – Um pesquisador descobriu um novo produto contra pragas que atingem a plantação de madeira de lei. Depois de definir o sistema de produção, partiu para a tarefa de definir sobre a comercialização. Foi então que decidiu que o produto seria comercializado em potes cilíndricos com capacidade de 375π cm^3(porção que atende a 1 hectare plantada de milho). O custo do material utilizado para a base do pote é de R$ 0,15 por cm^3 e o custo do material para a parte curva é de R$ 0,05 por cm^3. Para que seu custo seja mínimo, quais as dimensões do pote cilíndrico?

9 – Considerando a função que descreve a densidade volumétrica de solo, em mg/m^3 em diferentes alturas do solo, em *m*, dada por $f(x)=1,14+3,17x - 17x^2+25,71x^3$.Encontre as alturas no perfil de solo onde a densidade volumétrica é maior e menor.

10 – Um experimento de resposta do feijão (g/vaso) à adição de fósforo (ppm), aproximou-se pela função $f(x)= -0,00000083x^3+0,0000678x^2+0,061792x+6,7287$. Encontre qual a quantidade de fósforo aplicada na qual o feijão crescerá mais rapidamente.

11 – Usando uma folha quadrada de cartolina, de lado igual a *60 cm*, deseja-se construir uma caixa sem tampa, cortando seus cantos em quadrados iguais e dobrando convenientemente a parte restante. Determinar o lado dos quadrados que devem ser cortados de modo que o volume da caixa seja o *maior* possível.



12 – A potência *P* de uma bateria de um automóvel é dada por:

$$P = VI - I^2R,$$

sendo *I* a corrente para uma voltagem *V* e resistência interna da bateria *R*. São constantes *V* e *R*. Que corrente corresponde à potência *máxima*?

13 – O departamento de trânsito de uma cidade, depois de uma pesquisa, constatou que num dia normal da semana à tarde, entre 2 e 7 horas, a velocidade do tráfego é de aproximadamente $V(t) = 2t^3 - 27t^2 + 108t - 35$ quilômetros por hora, onde *t* é o número de horas transcorridas após o meio dia. A que horas do intervalo de 2 às 7 o tráfego flui mais rapidamente e a que horas flui mais lentamente, e com que velocidade?